JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 12, 265–282 (1974)

Das Spline-Problem als ein Approximationsproblem

EGON SCHEFFOLD

Fachbereich Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt, BRD-6100 Darmstadt, West Germany

Communicated by Lothar Collatz

EINLEITUNG

Funktionalanalytische Behandlungen verallgemeinerter Spline-Probleme befinden sich in den Veröffentlichungen von De Boor–Lynch [10], Jerome–Schumaker [18], Jerome–Varga [19], Atteia [6–8], Golomb [14], Anselone–Laurent [5], Laurent [22], Sard [26], Aubin [9], Lucas [24] und Delvos–Schempp [11, 12], welche die Spline-Systeme einführen. In diesen Arbeiten werden die betrachteten Spline-Probleme auf dem Hintergrund von Hilberträumen formuliert. Die dabei eingeführten, verallgemeinerten Spline-Elemente werden mit Hilfe gewisser Orthogonalitätsrelationen charakterisiert.

Angeregt durch diesen Sachverhalt versuchen wir in der vorliegenden Arbeit an Hand einer sehr elementaren, abstrakten Spline-Theorie ein allgemeines Spline-Problem im Rahmen der Funktionalanalysis zu behandeln. Dabei lassen sich zum Teil die vorher erwähnten Abhandlungen unter einem einfachen, einheitlichen Gesichtspunkt zusammenfassen. Diese Arbeit befaßt sich nicht mit der numerischen Seite von Spline-Problemen. Sie ist vielmehr als ein funktionalanalytischer Beitrag gedacht.

Im ersten Kapitel stellen wir eine kleine, abstrakte Spline-Theorie auf. Zu diesem Zweck führen wir die Begriffe "T-Spline-Element" und "Spline-Operator" ein. Wir formulieren ein abstraktes Spline-Problem, das zu einem Approximations problem äquivalent ist.

Im zweiten Kapitel wenden wir die Ergebnisse des ersten auf die skalarwertige Spline-Interpolation an. Dabei geben wir hinreichende Bedingungen für die Existenz interpolierender Spline-Elemente an. Ferner untersuchen wir die Situation, wenn die Interpolationsdaten durch stetige Linearformen gegeben sind. In diesem Zusammenhang beweisen wir eine Verallgemeinerung des Approximationssatzes von Schoenberg [28] für stetige Linearformen.

Im dritten Kapitel behandeln wir L-Splines und Splines im Sinne von Sard [26]. Wir beweisen, daß im Banachraum $K^{2,m}(I)$ bezüglich eines Differentialoperators L m-ter Ordnung mit nur stetigen Koeffizienten stets interpolierende L-Spline-Funktionen existieren, wenn die Interpolationsdaten durch stetige Linearformen gegeben sind. Im Falle endlich vieler Interpolationsbedingungen zeigen wir, wie man konstruktiv L-Spline-Funktionen bestimmen kann. Unter schwächeren Voraussetzungen und ohne die Hilbertraum-Methode von Golomb–Weinberger [13] erhalten wir einige Ergebnisse von Sard [26].

1. Eine Abstrakte Spline-Theorie

Bei allen in dieser Arbeit betrachteten Vektorräumen ist der Skalarkörper der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Es seien E und F Vektorräume. Mit $L(E, F)$ bezeichnen wir den Vektorraum der linearen Abbildungen von E in F. Für $S \in L(E, F)$ bedeutet Kern S den Kern von S und Bild S das Bild von S. Ist M ein linearer Teilraum von E und $T \in L(E, F)$, so verstehen wir unter T_M die Einschränkung von T auf M. Es bezeichne $(\cdot, \cdot)$ eine positiv semidefinite Hermitesche Form auf E. Die Funktion p, definiert durch $p(x) := (x, x)^{1/2}$ für alle $x \in E$, ist dann eine Halbnorm auf E. Seien x und y zwei Elemente aus E. Wir sagen, x ist orthogonal zu y (in Zeichen: $x \perp y$), falls $(x, y) = 0$ ist. Eine Projektion $P \in L(E, E)$ heißt Orthogonal projektion, falls Bild $P \perp$ Bild $(I - P)$ gilt, wobei I die Identität in $L(E, E)$ bezeichnet. Es sei N der Nullraum von p (also $N = p^{-1}(0)$), $\hat{E}$ der Quotientenraum E/N und φ die kanonische Abbildung $x \to \hat{x}$ von E auf $\hat{E}$, wobei $\hat{x}$ die Äquivalenzklasse von x in $\hat{E}$ bedeutet. Auf $\hat{E}$ induziert die auf E gegebene Hermitesche Form $(\cdot, \cdot)$ ein inneres Produkt $(\cdot, \cdot)$; es ist $(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y)$ für alle $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{E}$, wobei x bzw. y ein beliebiger Repräsentant der Äquivalenzklasse $\hat{x}$ bzw. $\hat{y}$ ist. $\hat{E}$ ist also ein Prähilbertraum mit der kanonischen Norm $\| \hat{x} \| = p(x)$ $(x \in \hat{x})$ für alle $\hat{x} \in \hat{E}$. Im folgenden haben E, N, $\hat{E}$, φ und F stets die vorher festgelegte Bedeutung.

Es sei nun $T \in L(E, F)$. Angeregt durch das Problem der Spline-Interpolation—vgl. Einleitung zum 2. Kapitel—definieren wir den Begriff T-Spline-Element wie folgt:

Definition 1. Es sei $x \in E$. Ein Element $s \in E$ heißt T-Spline-Element zu x, falls gilt:

(i) $Ts = Tx$,
(ii) $p(s) \leqslant p(z)$ für alle $z \in E$ mit $Tz = Tx$.

Definition 2. Ein Operator $T \in L(E, F)$ heißt Spline-Operator, wenn zu jedem $x \in E$ mindestens ein T-Spline-Element existiert.

Unter dem abstrakten Spline-Problem verstehen wir nun die Frage nach Existenz, Eindeutigkeit und weiteren Eigenschaften von T-Spline-Elementen.

Es sei $K \subseteq F$. Das Problem, ob in $T^{-1}(K)$ ein Element s_0 existiert mit $p(s_0) \leqslant p(z)$ für alle $z \in T^{-1}(K)$, ist allgemeiner als das soeben formulierte. Mit Fragestellungen, die als Spezialfälle dieses Problems angesehen werden können, befassen sich Atteia [8] und Ritter [25]. Da aber jedes solche Element s_0 offensichtlich ein T-Spline-Element zu sich selbst ist, halten wir die Frage nach den T-Spline-Elementen für primär. Kennt man sie nämlich, so läßt sich dieses Problem auf die Frage, ob es unter denjenigen T-Spline-Elementen, welche von T in K abgebildet werden, eines mit kleinster Halbnorm p gibt, zurückführen.

Der folgende Satz, dessen einfachen Beweis wir dem Leser überlassen, zeigt, daß das abstrakte Spline-Problem letztlich ein Approximationsproblem ist.

SATZ 1.1. *Es sei $T \in L(E, F)$ und $x \in E$. Das Element $s_x \in E$ ist genau dann ein T-Spline-Element zu x, wenn s_x eine Darstellung in der Form $s_x = x - \bar{y}$ besitzt, wobei $\bar{y} \in \text{Kern}\, T$ ist und $p(x - \bar{y}) \leqslant p(x - y)$ für alle $y \in \text{Kern}\, T$ ist, d.h., wobei $\bar{y}$ ein Element bester Approximation zu x bezüglich des Teilraums* Kern *T ist.*

KOROLLAR 1.2. *Ein Operator $T \in L(E, F)$ ist genau dann ein Spline-Operator, wenn der Kern von T ein Teilraum bester Approximation ist, d.h., wenn zu jedem $x \in E$ mindestens ein $\bar{y} \in \text{Kern}\, T$ existiert mit $p(x - \bar{y}) \leqslant p(x - y)$ für alle $y \in \text{Kern}\, T$.*

Entscheidend für die Existenz und Eindeutigkeit von T-Spline-Elementen ist also der Kern von T. Dies zeigt sich auch in der folgenden Charakterisierung der T-Spline-Elemente mit Hilfe des Prähilbertraumes $\hat{E}$. Dazu benötigen wir einige bekannte Tatsachen aus der Hilbertraum-Theorie (vgl. Achieser [1, S. 15]).

HILFSSATZ 1.3. *Es sei H ein Prähilbertraum, G ein linearer Teilraum von H, $x \in H$ und $y \in G$.*

(a) *Es gilt genau dann $\| x - y \| \leqslant \| x - z \|$ für alle $z \in G$, wenn $x - y \perp z$ ist.*

(b) *G ist genau dann ein Teilraum bester Approximation, wenn G in H ein orthogonales Komplement besitzt, d.h., wenn H die algebraische, direkte Summe von G und $G^{\perp}$ ist, wobei $G^{\perp}$ die Menge aller Elemente aus H bezeichnet, die zu allen Elementen von G orthogonal sind.*

THEOREM 1.4. *Es sei $T \in L(E, F)$ und $x, s \in E$. Dann gilt:*

(a) *Das Element s ist genau dann ein T-Spline-Element zu x, wenn $x - s \in \text{Kern}\, T$ ist und $s \perp \text{Kern}\, T$ ist.*

(b) *T ist genau dann ein Spline-Operator, wenn in $\hat{E}$ der Teilraum* $\varphi(\text{Kern } T)$ *ein orthogonales Komplement besitzt.*

Beweis. Wir betrachten den Prähilbertraum $\hat{E}$. Sei G ein linearer Teilraum von E, $x \in E$ und $y \in G$. Es ist offensichtlich genau dann y eine beste Approximation zu x bezüglich G, wenn in $\hat{E}$ das Element $\hat{y}$ eine beste Approximation zu $\hat{x}$ bezüglich $\hat{G}(= \varphi(G))$ ist. Ferner ist G genau dann ein Teilraum bester Approximation in E, wenn dies auch $\hat{G}$ in $\hat{E}$ ist. Die Aussagen (a) und (b) sind daher leichte Folgerungen aus (1.1) und (1.3).

Aus (1.4.a) ist klar ersichtlich, daß die Eigenschaft, T-Spline-Element zu sein, im wesentlichen auf einer Orthogonalitätsrelation beruht; und dies liegt daran, daß bei der Approximation in Prähilberträumen die Orthogonalitätsrelation von entscheidender Bedeutung ist, wie (1.3) zeigt. In Jerome–Schumaker [18], Theorem 2.1, werden die Lg-Splines durch eine entsprechende Orthogonalitätsrelation gekennzeichnet (s. auch Sard [26], 3.).

Es bezeichne S_x die Menge aller zu einem Element $x \in E$ gehörigen T-Spline-Elemente. Das folgende Korollar zeigt, daß die Menge der T-Spline-Elemente ähnliche Eigenschaften besitzt wie die Menge bekannter, verallgemeinerter Spline-Elemente (vgl. z. B. Haußmann [17, Korollar 1]).

KOROLLAR 1.5. *Es sei $T \in L(E, F)$ ein Spline-Operator. Dann gilt:*

(1) *Für jedes $x \in E$ ist S_x eine lineare Mannigfaltigkeit; denn es ist* $S_x = s_x + (\text{Kern } T \cap N)$ *für jedes T-Spline-Element s_x zu x.*

(2) *S_x besteht genau dann nur aus einem einzigen Punkt, wenn* $\text{Kern } T \cap N = \{0\}$ *ist.*

(3) *Es ist $\bigcup_{y \in E} S_y$ ein linearer Teilraum von E. Sind s_x und s_y T-Spline-Elemente zu x und y aus E, so sind $s_x + s_y$ und λs_x T-Spline-Elemente zu $x + y$ und λx für alle komplexen Zahlen λ.*

(4) *Es ist $p(x - s_x) \leqslant p(x - s_y)$ für alle $x, y \in E$ und alle T-Spline-Elemente s_x und s_y zu x bzw. y.*

Beweis. Die Aussage (1) erhält man aus (1.4.a) mit Hilfe der Cauchy–Schwarz'schen Ungleichung. Die Behauptung (2) folgt unmittelbar aus (1). Die Aussage (3) ist eine leichte Folgerung aus (1.4.a). Zu (4): Seien $x, y \in E$ und s_x bzw. s_y T-Spline-Elemente zu x bzw. y. Es ist $x - s_y = x - s_x + (s_x - s_y)$. Aus $(s_x - s_y) \perp \text{Kern } T$ folgt nun $p(x - s_y) \geqslant p(x - s_x)$. Q.E.D.

Die natürlichen Spline-Funktionen (s. Greville [15]) besitzen bekanntlich zwei Minimaleigenschaften, von denen wir die eine zur Definition der T-Spline-Elemente benutzt haben. Korollar 1.5.(4) zeigt nun, daß auch die andere Minimaleigenschaft erfüllt ist.

DEFINITION 3. Es sei $T \in L(E, F)$. Ist P eine Projektion in E mit der Eigenschaft, daß Px für jedes $x \in E$ ein T-Spline-Element zu x ist, so nennen wir P eine zu T assoziierte Spline-Projektion.

SATZ 1.6. *Es sei $T \in L(E, F)$ und P eine Projektion in E. P ist genau dann eine zu T assoziierte Spline-Projektion, falls gilt*:

(i) Kern $P \subseteq$ Kern T,

(ii) P(Kern $T) \subseteq N$,

(iii) *P ist eine Orthogonalprojektion.*

Beweis. $\Rightarrow$: Sei P eine zu T assoziierte Spline-Projektion. Aus $Tx = T(Px)$ für alle $x \in E$ folgt Kern $P \subseteq$ Kern T. Da für jedes $y \in$ Kern T das Element 0 ein T-Spline-Element zu y ist, impliziert $y \in$ Kern T stets $Py \in N$. Es ist also auch P(Kern $T) \subseteq N$. Seien $x, z \in E$. Nach (1.4.a) gilt $z - Pz \in$ Kern T und $Px \perp$ Kern T. Daraus folgt $(Px, z - Pz) = 0$. Q.E.D.

$\Leftarrow$: P erfülle die Bedingungen (i)–(iii). Sei $x \in E$ und $y \in$ Kern T. Aus (i) bzw. (ii) folgt $Px - x \in$ Kern T bzw. $(Py, Py) = 0$. Es ist daher $(Px, Py) = 0$. Nach (iii) gilt somit $0 = (Px, y - Py) = (Px, y) + (Px, Py) = (Px, y)$. Aufgrund von (1.4.a) ist nun Px ein T-Spline-Element zu x. Q.E.D.

KOROLLAR 1.7. *Jede Orthogonalprojektion in E ist eine zu sich selbst assoziierte Spline-Projektion und somit ein Spline-Operator.*

Es sei $T \in L(E, F)$. Im folgenden wollen wir zwei für die Anwendungen wichtige Darstellungen von T-Spline-Elementen angeben.

Es sei nun M ein Teilraum von E, so daß E die algebraische, direkte Summe von M und N ist. Dann ist bekanntlich M algebraisch isomorph zu $\hat{E}\,(= E/N)$. Die Einschränkung der gegebenen Hermiteschen Form auf M definiert ein inneres Produkt, da sie auf M positiv definit ist. Dieses innere Produkt nennen wir das kanonische innere Produkt auf M. Wir können daher M als einen Prähilbertraum betrachten. Die Abbildung φ_M ist ein Prähilbertraum-Isomorphismus zwischen M und $\hat{E}$. Ferner setzen wir voraus, daß Kern T die algebraische, direkte Summe der Teilräume M_0 und Kern $T \cap N$ und N die der Teilräume $\tilde{M}$ und Kern $T \cap N$ ist.

HILFSSATZ 1.8. *Folgende Aussagen sind äquivalent*:

(i) *In $\hat{E}$ besitzt der Teilraum φ(Kern T) ein orthogonales Komplement.*

(ii) *Es besitzt M_0 ein orthogonales, algebraisches Komplement M_1 in E.*

(iii) *Der Teilraum $T_M^{-1}(T(N))$ von M besitzt ein orthogonales Komplement im Prähilbertraum M.*

Beweis. (i) $\rightarrow$ (ii): Es ist φ_{M_0} eine bijektive Abbildung von M_0 auf $\varphi(\text{Kern } T)$ in $\hat{E}$. Sei $\hat{P}$ die Orthogonalprojektion auf den Teilraum $\varphi(\text{Kern } T)$ in $\hat{E}$. Dann ist in E die Abbildung $P_{M_0} := \varphi_{M_0}^{-1} \circ \hat{P} \circ \varphi$ eine Projektion auf M_0. Ferner gilt $(P_{M_0}x, z - P_{M_0}z) = 0$ für alle $x, z \in E$, d.h., der Teilraum Bild $(I - P_{M_0})$ ist ein orthogonales, algebraisches Komplement von M_0.

(ii) $\rightarrow$ (i): In $\hat{E}$ ist $\varphi(M_1) \perp \varphi(M_0)$. Ferner ist $\varphi(M_0) = \varphi(\text{Kern } T)$. Der Teilraum $\varphi(M_1)$ ist also ein orthogonales Komplement von $\varphi(\text{Kern } T)$.

(i) $\leftrightarrow$ (iii): Die Abbildung φ_M ist ein Prähilbertraum-Isomorphismus zwischen M und $\hat{E}$. Ferner ist nach Voraussetzung M ein algebraisches Komplement von N. Durch eine Routinerechnung ergibt sich dann, daß in $\hat{E}$ die Beziehung $\varphi_M(T_M^{-1}(T(N))) = \varphi(\text{Kern } T)$ gilt. Daraus folgt aber die Äquivalenz von (i) und (iii). Q.E.D.

Sei nun T ein Spline-Operator. Dann besitzt nach (1.4.b) und (1.8) der Teilraum M_0 ein orthogonales, algebraisches Komplement M_1. Es bezeichne P_{M_1} die durch die Zerlegung $E = M_0 \oplus M_1$ definierte Projektion auf den Teilraum M_1. Ebenso besitzt im Prähilbertraum M der Teilraum $T_M^{-1}(T(N))$ ein orthogonales Komplement. Sei P in M die Orthogonalprojektion auf $T_M^{-1}(T(N))$. Die durch die Zerlegung $E = M \oplus N$ bestimmten Projektionen auf die Teilräume M und N bezeichnen wir mit p_M und p_N. Nun ist die Abbildung $T_{\tilde{M}}$ eine bijektive, lineare Abbildung von $\tilde{M}$ auf $T(N)$ in F. Ferner ist $T_M(Pz) \in T(N)$ für alle $z \in M$. Es ist daher die Abbildung $P_{\tilde{M}} := p_M + p_N - P \circ p_M + T_{\tilde{M}}^{-1} \circ T_M \circ P \circ p_M$ wohldefiniert. Ferner läßt sich durch eine einfache Rechnung zeigen, daß $P_{\tilde{M}}$ eine Orthogonalprojektion in E ist.

Satz 1.9. *Für jedes $x \in E$ sind die Elemente $P_{M_1}(x)$ und $P_{\tilde{M}}(x)$ T-Spline-Elemente zu x.*

Beweis. Wir zeigen, daß $P_{M_1}(x)$ und $P_{\tilde{M}}(x)$ die Bedingungen von (1.4.a) erfüllen. Es ist $x - P_{M_1}(x) \in M_0 \subseteq \text{Kern } T$. Ferner gilt $T(x - P_{\tilde{M}}(x)) = T(P \circ p_M(x)) - T_M \circ P \circ p_M(x) = 0$, d.h., es ist auch $x - P_{\tilde{M}}(x) \in \text{Kern } T$. Sei nun $y \in \text{Kern } T$ und $x \in E$. Dann existieren folgende Darstellungen:

$$\begin{aligned} y &= u + v && \text{mit} \quad u \in M_0 \quad \text{und} \quad v \in N \cap \text{Kern } T, \\ y &= u_1 + v_1 && \text{mit} \quad u_1 \in M \quad \text{und} \quad v_1 \in N, \\ P_{\tilde{M}}(x) &= u_2 + v_2 && \text{mit} \quad u_2 \perp T_M^{-1}(T(N)) \quad \text{und} \quad v_2 \in N. \end{aligned}$$

Aus $y = u_1 + v_1$ folgt aber $u_1 \in T_M^{-1}(T(N))$. Aus den vorhergehenden Darstellungen ergibt sich damit sofort $(P_{M_1}(x), y) = 0$ bzw. $(P_{\tilde{M}}(x), y) = 0$. Q.E.D.

Bemerkung 1.10. Die Orthogonalprojektionen P_{M_1} und $P_{\tilde{M}}$ sind offensichtlich zu T assoziierte Spline-Projektionen. Ist $\text{Kern } T \cap N = \{0\}$, so kann es nach (1.5.(2)) nur eine zu T assoziierte Spline-Projektion geben. In diesem Fall gibt es also eine eindeutig bestimmte, zu T assoziierte Spline-Projektion.

Mit Hilfe von (1.7) kann man einen engen Zusammenhang zwischen Spline-Systemen und zu sich selbst assoziierten Spline-Projektionen aufzeigen. Der Begriff des Spline-Systems wurde von Delvos-Schempp [11] eingeführt und von Haußmann [16, 17] abgeschwächt.

DEFINITION 4 (Haußmann [17]). Ein Quadrupel (X, P, U, H) heißt Spline-System, falls gilt:

(S1) X ist ein Vektorraum, H ein Prähilbertraum.
(S2) Es ist $P \in L(X, X)$ und $P^2 = P$.
(S3) Es ist $U \in L(X, H)$.
(S4) Bild $UP \perp$ Bild $U(I - P)$.

Ist (X, P, U, H) ein Spline-System, so definiert $(x, y) := (Ux, Uy)_H$ $(x, y \in X)$ eine positiv semidefinite Hermitesche Form auf X; $(\cdot, \cdot)_H$ bedeutet dabei das innere Produkt auf H.

SATZ 1.11. *Es sei (X, P, U, H) ein Spline-System. Ferner sei X versehen mit der Hermiteschen Form $(x, y) := (Ux, Uy)_H$ für alle $x, y \in X$. Dann ist P eine zu sich selbst assoziierte Spline-Projektion.*

Schoenberg [28] hat einen Approximationssatz für gewisse stetige Linearformen bewiesen. Im folgenden formulieren wir einen entsprechenden Satz für gewisse Linearformen aus dem algebraischen Dual E^* von E.

Es sei $\tilde{E}$ die Vervollständigung des Prähilbertraumes $\hat{E}$. Dann ist die Abbildung ψ von $\tilde{E}$ in E^*, definiert durch $\psi(y)(z) := (\varphi(z), y)$ für alle $z \in E$ und $y \in \tilde{E}$, injektiv, additiv und konjugiert-linear. Die Teilräume $\psi(\hat{E})$ und $\psi(\tilde{E})$ in E^* bezeichnen wir mit $\hat{E}_e$ und $\tilde{E}_e$. Auf $\tilde{E}_e$ führen wir das innere Produkt $(x, y)_e := (\psi^{-1}(y), \psi^{-1}(x))$ für alle $x, y \in \tilde{E}_e$ ein. Mit diesem inneren Produkt ist $\tilde{E}_e$ ein Hilbertraum, und es gilt $\| x \|_e = \| \psi^{-1}(x) \|$ für alle $x \in \tilde{E}_e$. Für jeden Operator $S \in L(E, E)$ bezeichne S^* den adjungierten Operator in E^*. Der folgende Hilfssatz, dessen Beweis wir dem Leser überlassen, beruht auf bekannten Eigenschaften von Orthogonalprojektionen in Prähilberträumen.

HILFSSATZ 1.12. *Es sei P eine Orthogonalprojektion in E. Dann gilt $P^*(\hat{E}_e) \subseteq \hat{E}_e$ und $P^*(\tilde{E}_e) \subseteq \tilde{E}_e$. Ferner sind $P^*_{\hat{E}_e}$ und $P^*_{\tilde{E}_e}$ Orthogonalprojektionen in $\hat{E}_e$ und $\tilde{E}_e$.*

SATZ 1.13. *Es sei P eine Orthogonalprojektion in E. Seien y und z aus E^* mit $y - z \in \tilde{E}_e$ und $P^*z = z$. Dann gilt $y - P^*y \in \tilde{E}_e$ und $\| y - P^*y \|_e \leqslant$*

$\| y - z \|_e$, *dies bedeutet, für jedes* $y \in E^*$ *mit* $y - P^*y \in \tilde{E}_e$ *ist* P^*y *eine beste Approximation zu* y *bezüglich* $(y + \tilde{E}_e) \cap$ Bild P^*.

Beweis. Nach (1.12) sind $P^*_{\tilde{E}_e}$ und $I - P^*_{\tilde{E}_e}$ Orthogonalprojektionen in $\tilde{E}_e$. Es ist daher $\|(I - P^*)x\|_e \leqslant \| x \|_e$ für alle $x \in \tilde{E}_e$. Nun ist $(I - P^*)(y - z) = y - P^*y$. Daraus folgt $y - P^*y \in \tilde{E}_e$ und $\| y - P^*y \|_e \leqslant \| y - z \|_e$. Q.E.D.

2. Eine Anwendung: Die Spline-Interpolation

In diesem Kapitel werden wir die vorhergehenden Bezeichnungen beibehalten. Wir behandeln nun die Spline-Interpolation. Es ist ein Interpolationsproblem mit Nebenbedingungen. Wir können es allgemein so formulieren: Sei E ein Vektorraum mit einer positiv semidefiniten Hermiteschen Form. Es bezeichne n eine feste natürliche Zahl. Ferner seien y_i bzw. a_i $(i = 1,..., n)$ n Linearformen aus E^* bzw. n komplexe Zahlen. Gesucht ist nun ein Element $\bar{x} \in E$ mit den beiden Eigenschaften:

(i) $y_i(\bar{x}) = a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$
(ii) $p(\bar{x}) \leqslant p(x)$ für alle $x \in E$ mit $y_i(x) = a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Im folgenden bezeichne F den Vektorraum $\mathbb{C}^n$ und T die lineare Abbildung von E in F, welche durch $Tx := (y_i(x))$ für alle $x \in E$ definiert ist. Es ist genau dann $T(E) = F$, wenn die Linearformen y_i linear unabhängig sind. Mit Hilfe des Begriffs Spline-Operator erhält man sofort die Aussage:

Satz 2.1. *Zu je n komplexen Zahlen* a_i *existiert genau dann mindestens ein Element* $\bar{x} \in E$ *mit den vorhergehenden Eigenschaften* (i) *und* (ii), *wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind*:

(a) *Die Linearformen* y_i *sind linear unabhängig.*
(b) *Der Operator* T *ist ein Spline-Operator.*

Es existiert genau dann nur ein einziges solches Element $\bar{x}$, *wenn zusätzlich noch gilt*:

(c) *Es ist* Kern $T \cap N = \{0\}$, *d.h., für jedes* $x \in E$ *folgt aus* $p(x) = 0$ *und* $y_i(x) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *stets* $x = 0$.

Für den Beweis wähle man ein Element $x \in E$ mit $y_i(x) = a_i$ und betrachte die zu x gehörigen T-Spline-Elemente.

2.2. Es seien die Bedingungen (a), (b), und (c) von (2.1) erfüllt. Nach (1.10) gibt es eine eindeutig bestimmte, zu T assoziierte Spline-Projektion P. Für alle $x \in E$ gilt dann

(α) $y_i(x) = y_i(Px)$ (d.h., es ist $P^*y_i = y_i$), und

(β) $p(Px) < p(z)$ für alle $z \in E$ mit $z \neq Px$ und $y_i(z) = y_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Da die Linearformen y_i linear unabhängig sind, gibt es n Elemente $x_j \in E$ mit $y_i(x_j) = \delta_{i,j}$ (Kroneckersymbol). Nun sei $s_j := Px_j$. Dann ist $y_i(s_j) = \delta_{i,j}$. Es sind daher sowohl die Vektoren s_j als auch die Einschränkungen der y_i auf $P(E)$ linear unabhängig. Für $x \in E$ sei $\tilde{x} := x - \sum_{i=1}^{n} y_i(x)\, s_i$. Dann ist $\tilde{x} \in \operatorname{Kern} T$. Da nun $S_{\tilde{x}} = \{0\}$ ist, gilt $P\tilde{x} = 0$, das bedeutet aber $Px = \sum_{i=1}^{n} y_i(x)\, s_i$. Da die Vektoren s_i linear unabhängig sind, ist somit $\dim P(E) = n$. Zusammenfassend erhalten wir: Zu jedem $x \in E$ gibt es genau ein Element $\bar{x} \in P(E)$ mit $y_i(x) = y_i(\bar{x})$, nämlich das Element $\sum_{i=1}^{n} y_i(x)\, s_i$ $(= Px)$. Die Elemente aus $P(E)$ nennen wir daher interpolierende Spline-Elemente (vgl. auch Haußmann [17], 5.).

Ist E ein unendlichdimensionaler Hilbertraum und y eine nichtstetige Linearform auf E, so ist der zu y gehörige Operator T von E nach $\mathbb{C}^1$ offensichtlich kein Spline-Operator. Wir untersuchen nun im folgenden, unter welchen Voraussetzungen über die Linearformen $y_i \in E^*$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ der dazugehörige Operator T ein Spline-Operator ist. Dabei sei der Teilraum M von E stets ein algebraisches Komplement des Teilraums N von E. Ferner werde M in der schon erwähnten Weise als Prähilbertraum betrachtet. Sind alle y_i über N linear unabhängig, so ist T offensichtlich ein Spline-Operator, und alle T-Spline-Elemente liegen in N. Es bedeute $y_{i|N}$ die Restriktion der Linearform y_i auf den Teilraum N.

SATZ 2.3. *Es seien y_i n Linearformen aus E^*, die über N linear abhängig sind. Existieren zu den y_i n Elemente $\tilde{y}_i$ im Prähilbertraum M mit $y_i(x) = (x, \tilde{y}_i)$ für alle $x \in M$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, so ist der zu den y_i gehörige Operator T von E nach $\mathbb{C}^n$ ein Spline-Operator, und für jedes $x \in E$ ist die M-Komponente jedes zu x gehörigen T-Spline-Elements s_x gleich der Orthogonalprojektion der M-Komponente von x auf einen gewissen Teilraum der linearen Hülle $\langle \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n \rangle$ von $\{\tilde{y}_i\colon 1 \leqslant i \leqslant n\}$, welcher im Beweis genau bestimmt wird.*

Beweis. Es seien $\tilde{y}_i$ n Elemente in M mit $y_i(x) = (x, \tilde{y}_i)$ für alle $x \in M$. Durch zwei Fallunterscheidungen zeigen wir, daß der Teilraum $T_M^{-1}(T(N))$ von M ein orthogonales Komplement besitzt. Nach (1.8) und (1.4.b) ist dann T ein Spline-Operator.

(α) Zunächst nehmen wir an, daß alle y_i auf N verschwinden. Für $x \in E$ gilt offensichtlich genau dann $x \in T_M^{-1}(T(N))$, wenn $x \in \langle \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n \rangle^{\perp}$ ist. Der endlichdimensionale Teilraum $\langle \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n \rangle$ ist daher ein orthogonales Komplement von $T_M^{-1}(T(N))$.

(β) Die Linearformen $y_{1|N}, \ldots, y_{m|N}$ $(1 \leqslant m < n)$ mögen eine Basis von

$\langle y_{1|N}, \ldots, y_{n|N} \rangle$ in N^* bilden (o.B.d.A. können wir diese Indizierung annehmen). Dann lassen sich die $y_{i|N}$ $(i = m+1, \ldots, n)$ als Linearkombinationen der $y_{i|N}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ in der Form $y_{i|N} = \sum_{\nu=1}^m a_\nu^{(i)} y_{\nu|N}$ $(a_\nu^{(i)} \in \mathbb{C})$ darstellen. Nun sei $G := \langle \tilde{y}_{m+1} - \sum_{\nu=1}^m a_\nu^{(m+1)} \tilde{y}_\nu, \ldots, \tilde{y}_n - \sum_{\nu=1}^m a_\nu^{(n)} \tilde{y}_\nu \rangle$. Für $x \in M$ ist es nicht schwer zu zeigen, daß genau dann $x \in T_M^{-1}(T(N))$ gilt, wenn $x \in G^\perp$ ist. Es ist daher G ein orthogonales Komplement von $T_M^{-1}(T(N))$.

Nach (1.5.(1)) besitzen alle zu einem Element $x \in E$ gehörigen T-Spline-Elemente dieselbe M-Komponente. Aus der Definition des T-Spline-Elements $P_{\tilde{M}}(x)$ von (1.9) ist ersichtlich, daß die M-Komponente eines zu x gehörigen T-Spline-Elements gleich der Orthogonalprojektion der M-Komponente von x auf den Teilraum $\langle \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n \rangle$ im Fall (α) bzw. auf den Teilraum $G \subseteq \langle \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n \rangle$ im Fall (β) ist. Q.E.D.

Ist die M-Komponente eines T-Spline-Elements bekannt, so ist die Bestimmung seiner N-Komponente ein reines Interpolationsproblem.

KOROLLAR 2.4. *Ist M vollständig und sind die Restriktionen der Linearformen y_i auf M stetig, so ist der zu den y_i gehörige Operator T ein Spline-Operator.*

Beweis. Da M ein Hilbertraum ist, gibt es bekanntlich n Elemente $\tilde{y}_i \in M$ mit $y_i(x) = (x, \tilde{y}_i)$ für alle $x \in M$.

Es sei J eine beliebige, nichtleere Indexmenge und $\{y_j : j \in J\}$ eine Familie von Linearformen aus E^*. Wie im Falle von n Linearformen kann man auch einer solchen Familie einen Operator T von E nach $\mathbb{C}^J$ zuordnen, nämlich durch $Tx = (y_j(x))$ für alle $x \in E$.

SATZ 2.5. *Es sei M vollständig und N endlichdimensional. Sind die Restriktionen der Linearformen y_j auf M stetig, so ist der zu der Familie $\{y_j : j \in J\}$ gehörige Operator T ein Spline-Operator.*

Beweis. Unter der Produkttopologie ist der Vektorraum $\mathbb{C}^J$ ein lokalkonvexer Raum. Es ist daher der endlichdimensionale Teilraum $T(N)$ in $\mathbb{C}^J$ abgeschlossen. Da die Restriktionen der y_j auf M stetig sind, ist T_M ein stetiger Operator von M in $\mathbb{C}^J$. Daraus folgt, daß $T_M^{-1}(T(N))$ ein abgeschlossener Teilraum des Hilbertraums M ist. Es besitzt daher $T_M^{-1}(T(N))$ ein orthogonales Komplement in M. Nach (1.8) und (1.4.b) ist somit T ein Spline-Operator.

Q.E.D.

Die Aussage von (2.5) gilt auch, wenn nur $\dim(T(N)) < \infty$ ist.

Im folgenden betrachten wir die Situation, wenn $\hat{E}$ ein Hilbertraum und E zusätzlich noch mit einer lokalkonvexen Hausdorff-Topologie $\mathscr{T}$ versehen ist. Es bezeichne $(E, \mathscr{T})'$ den topologischen Dual von $(E, \mathscr{T})$. Sind G und H zwei lokalkonvexe Vektorräume, so verstehen wir unter $\mathscr{L}(G, H)$ den

Vektorraum der stetigen, linearen Abbildungen von G in H. Für $S \in \mathscr{L}(G, H)$ bezeichne S' die zu S adjungierte Abbildung aus $\mathscr{L}(H', G')$. Ist S eine offene, surjektive Abbildung aus $\mathscr{L}(G, H)$, so gilt bekanntlich $(\operatorname{Kern} S)^0 = S'(H')$, wobei $(\operatorname{Kern} S)^0$ die Menge aller Linearformen aus G' bezeichnet, welche auf Kern S verschwinden.

SATZ 2.6. *Der Teilraum N von E besitze ein algebraisches Komplement M, so daß auf M die von $\mathscr{T}$ induzierte Topologie gröber oder gleich der vom kanonischen inneren Produkt induzierten Topologie ist. Dann ist für n Linearformen $y_i \in (E, \mathscr{T})'$ der dazugehörige Operator T stets ein Spline-Operator. Dies ist z.B. der Fall, wenn eine der beiden Bedingungen erfüllt ist:*

(i) *$(E, \mathscr{T})$ ist ein Fréchetraum, die Abbildung φ von $(E, \mathscr{T})$ auf $\hat{E}$ ist stetig, und N besitzt ein topologisches Supplement.*

(ii) *Es ist $\varphi \in \mathscr{L}((E, \mathscr{T}), \hat{E})$, und φ besitzt eine stetige, rechtsinverse Abbildung $\tilde{\varphi}$ von $\hat{E}$ nach $(E, \mathscr{T})$.*

Ist N endlichdimensional, so gilt die vorhergehende Aussage sinngemäß auch für eine beliebige Familie von Linearformen aus $(E, \mathscr{T})'$.

Beweis. Da $\hat{E}$ ein Hilbertraum ist, ist dies auch M mit dem kanonischen inneren Produkt. Es ist die Restriktion jeder Linearform $y \in (E, \mathscr{T})'$ auf M stetig. Für eine endliche Familie stetiger Linearformen folgt daher die Aussage aus (2.4), für eine beliebige Familie aus (2.5).

Zu (i). Sei M ein topologisches Supplement von N. Dann ist M unter der von $\mathscr{T}$ induzierten Topologie ein Fréchetraum. Ferner ist φ_M eine stetige, bijektive Abbildung von $(M, \mathscr{T})$ auf $\hat{E}$. Nach dem Homomorphiesatz von Banach ist daher $(M, \mathscr{T})$ topologisch isomorph zu $\hat{E}$. Daraus folgt aber, daß $(M, \mathscr{T})$ topologisch isomorph zum Hilbertraum M ist.

Zu (ii). Sei $\tilde{\varphi}$ eine stetige, rechtsinverse Abbildung von φ und $M := \tilde{\varphi}(\hat{E})$. Dann ist E die direkte, algebraische Summe von M und N. Ferner stimmt auf M die Hilbertraum-Topologie mit der von $\mathscr{T}$ induzierten Topologie überein. Q.E.D.

Eine Anwendung dieses Satzes bringen wir im dritten Kapitel.

Nun wollen wir eine topologische Fassung von Satz 1.13, eine Verallgemeinerung des Approximationssatzes von Schoenberg [28] angeben.

Es seien y_i n linear unabhängige Linearformen aus $(E, \mathscr{T})'$ mit der Eigenschaft: $x \in N$ und $y_i(x) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ impliziert $x = 0$. Ferner sei eine der Bedingungen (i) und (ii) von (2.6) erfüllt. Dann existiert eine eindeutig bestimmte, zu den y_i gehörige Spline-Projektion P (s. (2.2)). Ferner gibt es n Elemente $s_i \in P(E)$ mit $y_j(s_i) = \delta_{i,j}$ für $i, j = 1, \ldots, n$.

SATZ 2.7. *Es sei* $\bar{y} \in (E, \mathscr{T})'$ *und* $\tilde{y}$ *eine Linearkombination der* y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. *Dann gilt* $P^*\bar{y} = \sum_{i=1}^n \bar{y}(s_i)\, y_i$. *Verschwindet* $\bar{y} - \tilde{y}$ *auf* N, *so ist* $\bar{y} - \tilde{y} \in \hat{E}_e$, $\bar{y} - P^*\bar{y} \in \hat{E}_e$ *und* $\| \bar{y} - P^*\bar{y} \|_e \leqslant \| \bar{y} - \tilde{y} \|_e$, *dies bedeutet,* $\sum_{i=1}^n \bar{y}(s_i)\, y_i$ *ist im Hinblick auf die Hilbertraum-Norm* $\| \cdot \|_e$ *ein Element bester Approximation zu* $\bar{y}$ *bezüglich der Menge aller Linearkombinationen der* y_i, *welche auf* N *mit* $\bar{y}$ *übereinstimmen.*

Beweis. Jede der Bedingungen (i) und (ii) von (2.6) impliziert, daß φ eine offene Abbildung von $(E, \mathscr{T})$ auf $\hat{E}$ ist. Ferner ist $N = \operatorname{Kern} \varphi$. In $(E, \mathscr{T})'$ stimmt daher der Teilraum $\varphi'(\hat{E}')$ mit der Polaren N^0 von N überein. Da in E^* der Teilraum $\varphi'(\hat{E}')$ mit dem Teilraum $\hat{E}_e$ (s. 1. Kapitel) identisch ist, ergibt sich somit $\hat{E}_e \subseteq (E, \mathscr{T})'$ und $\hat{E}_e = N^0$.

Nach (2.2) gilt $Px = \sum_{i=1}^n y_i(x)\, s_i$ für alle $x \in E$. Daraus erhält man die Darstellung $P^*\bar{y} = \sum_{i=1}^n \bar{y}(s_i)\, y_i$. Da $P^* y_i = y_i$ ist, ergibt sich $P^*\tilde{y} = \tilde{y}$. Ist nun $\bar{y} - \tilde{y} \in N^0$, so gilt $\bar{y} - \tilde{y} \in \hat{E}_e$ $(= \tilde{E}_e)$. Da P eine Orthogonalprojektion in E ist, folgt dann die Ungleichung bezüglich der $\| \cdot \|_e$-Norm aus (1.13).

Q.E.D.

Aus (2.7) läßt sich als Spezialfall eine Verallgemeinerung des Approximationssatzes von Schoenberg für L-Splines ableiten (vgl. Delvos–Schempp [12]).

3. L-SPLINES UND SPLINES IM SINNE VON SARD [26]

L-Splines

Wir betrachten nun die in der Literatur behandelten Spline-Funktionen (s. Ahlberg–Nilson [2], Greville [15], Schoenberg [29], Jerome–Schumaker [18] und Delvos–Schempp [12]). Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes, endliches Intervall mit den Endpunkten a und b. Ferner bezeichne $C^{(m)}(I)$ den Vektorraum der m-mal stetig differenzierbaren, komplexwertigen Funktionen auf I. Für $1 \leqslant m \in \mathbb{N}$ sei $K^{2,m}(I) := \{f \in C^{(m-1)}(I) \colon f^{(m-1)}$ absolut stetig und $f^{(m)} \in L^2(I)\}$. Es bezeichne $\| \cdot \|_\infty$ die Supremumsnorm und $\| \cdot \|_H$ die Norm des Hilbertraumes $L^2(I)$. Die Funktion $f \to \| f \|_{K^{2,m}} := \sup\{\| f^{(i)} \|_\infty, \| f^{(m)} \|_H \colon 0 \leqslant i \leqslant m - 1\}$ ist eine Norm auf $K^{2,m}(I)$. Mit dieser Norm ist $K^{2,m}(I)$ ein Banachraum (s. Delvos–Schempp [11], Theorem 4).

Es sei L ein Differentialoperator m-ter Ordnung auf $K^{2,m}(I)$ von der allgemeinen Form $L(f) = \sum_{i=0}^m a_i f^{(i)}$ mit $a_i \in C^{(0)}(I)$ $(0 \leqslant i \leqslant m)$ und $a_m \neq 0$ stets. Differentialoperatoren von diesem Typ werden von Jerome–Schumaker [18] und Delvos–Schempp [12] behandelt. Dort wird aber zusätzlich gefordert, daß die Funktionen a_i aus $C^{(i)}$ sind. Die bei Kimeldorf und Wahba [21] auftretenden Differentialoperatoren lassen sich auch in die Klasse der hier betrachteten Operatoren einordnen. Es ist klar, daß ein Differentialoperator

L der angegebenen Form eine lineare Abbildung von $K^{2,m}(I)$ nach $L^2(I)$ definiert. Ferner induziert ein solcher Differentialoperator L auf die folgende Weise eine positiv semidefinite Hermitesche Form auf $K^{2,m}(I)$: Für $f, g \in K^{2,m}(I)$ sei $(f, g) := (Lf, Lg)_H$, wobei $(\cdot, \cdot)_H$ das innere Produkt in $L^2(I)$ bezeichnet.

HILFSSATZ 3.1. *Es sei L ein Differentialoperator des angegebenen Typs auf $K^{2,m}(I)$. Dann ist $L \in \mathscr{L}(K^{2,m}(I), L^2(I))$, und es besitzt L eine stetige, rechtsinverse Abbildung K.*

Beweis. Aus der Definition der Norm auf $K^{2,m}(I)$ folgt durch eine einfache Abschätzung, daß L stetig ist. Es sei nun $\gamma(x, \xi)$ eine Grundlösung der Differentialgleichung $L(z) = 0$ (s. [20, S. 26, Nr. 122 und 123]). Für jedes $f \in C^{(0)}(I)$ ist dann bekanntlich die Funktion $z(x) = \int_a^b \gamma(x, \xi) f(\xi)\, d\xi$ eine Lösung von $L(z) = f$. Auf dem in $L^2(I)$ dichten Teilraum $\mathscr{C}$ der stetigen Funktionen (genauer: der Äquivalenzklassen stetiger Funktionen) betrachten wir die Abbildung $K_{\mathscr{C}}$, welche jedem $f \in \mathscr{C}$ die Funktion $K_{\mathscr{C}}(f)(x) = \int_a^b \gamma(x, \xi) f(\xi)\, d\xi$ zuordnet. Unter Benutzung der Differentiationseigenschaften von Grundlösungen kann man in einer Routinerechnung nachweisen, daß $K_{\mathscr{C}}$ eine stetige, lineare Abbildung von $\mathscr{C}$ nach $K^{2,m}(I)$ ist. Nun sei K die stetige Fortsetzung von $K_{\mathscr{C}}$ auf den ganzen Raum $L^2(I)$. Wie leicht einzusehen ist, ist K eine stetige, rechtsinverse Abbildung von L. Ferner läßt sich Kf für alle $f \in L^2(I)$ in der Form $Kf(x) = \int_a^b \gamma(x, \xi) f(\xi)\, d\xi$ darstellen.

SATZ 3.2. *Es sei L ein Differentialoperator der angegebenen Form auf $K^{2,m}(I)$. Ferner sei $K^{2,m}(I)$ mit der von L induzierten, positiv semidefiniten Hermiteschen Form versehen. Dann ist für jede Familie stetiger Linearformen auf $K^{2,m}(I)$ der dazugehörige Operator T ein Spline-Operator, d.h., dann existieren sogenannte L-Splines.*

Beweis. Wir setzen $E := K^{2,m}(I)$. Nach (2.6) genügt es zu zeigen, daß $\hat{E}$ vollständig, N endlichdimensional und (2.6.ii) erfüllt ist. Es ist $N = \operatorname{Kern} L$. Bekanntlich ist $\dim(\operatorname{Kern} L) < \infty$. Es bezeichne $\hat{L}$ die von L induzierte, kanonische Abbildung von $\hat{E}$ in $L^2(I)$. Aus (3.1) folgt die Surjektivität von L. Es ist daher $\hat{L}$ ein isometrischer Isomorphismus zwischen $\hat{E}$ und $L^2(I)$. $\hat{E}$ ist somit vollständig. Nun ist $\varphi = \hat{L}^{-1} \circ L$. Aus (3.1) folgt daher auch $\varphi \in \mathscr{L}((E, \mathscr{T}), \hat{E})$. Ferner besitzt L nach (3.1) eine stetige, rechtsinverse Abbildung K. Dann ist aber die Abbildung $\tilde{\varphi} := K \circ \hat{L}$ eine stetige, rechtsinverse Abbildung von φ. Es ist somit auch (2.6.ii) erfüllt. Q.E.D.

Es seien nun die Voraussetzungen von (3.2) erfüllt. Ferner sei K eine stetige, rechtsinverse Abbildung von L, dargestellt durch die feste Grundlösung $\gamma(x, \xi)$. Seien y_i n Linearformen aus $(K^{2,m}(I))'$ mit dazugehörigem Operator T. Wir wollen jetzt zeigen, wie man mit Hilfe von (2.3) zu einer gegebenen Funktion $f \in K^{2,m}(I)$ eine f interpolierende L-Spline-Funktion konstruieren kann.

Es ist $N = \text{Kern } L$. Sei $M := K(L^2(I))$. Dann ist offensichtlich $K^{2,m}(I) = N \oplus M$, und M, versehen mit dem kanonischen inneren Produkt, ist ein Hilbertraum. Da auf M die Hilbertraum-Topologie mit der gegebenen Norm-Topologie übereinstimmt, gibt es zu jedem y_i eine Funktion $\tilde{y}_i \in M$ mit $y_i(f) = (f, \tilde{y}_i)$ für alle $f \in M$. Zunächst bestimmen wir die Repräsentanten $\tilde{y}_i$. Nach Schempp [27] läßt sich jede Linearform y_i in der Form

$$y_i(f) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_a^b f^{(k)}(x)\, d\mu_{k,i} + \int_a^b f^{(m)}(x)\, g_i(x)\, dx$$

darstellen. Sei nun $f \in K(\mathscr{C})$. Es ist also $f(x) = \int_a^b \gamma(x, \xi) f_0(\xi)\, d\xi$ mit $f_0 \in \mathscr{C} \subset L^2(I)$. Aufgrund der Differentiationseigenschaften von $\gamma(x, \xi)$ (s. [20, S. 245–248]) und des Satzes von Fubini erhält man

$$y_i(f) = \int_a^b \Bigg(\sum_{k=0}^{m-1} \int_a^b \gamma_x^{(k)}(x, \xi)\, d\mu_{k,i}(x) + g_i(\xi)(a_m(\xi))^{-1} + \int_a^b \gamma_x^{(m)}(x, \xi)\, g_i(x)\, dx \Bigg) f_0(\xi)\, d\xi, \qquad (*)$$

wobei $\gamma_x^{(k)}(x, \xi)$ die k-te partielle Ableitung nach x bedeutet. Setzt man

$$\tilde{\tilde{y}}_i(\xi) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_a^b \gamma_x^{(k)}(x, \xi)\, d\mu_{k,i}(x) + g_i(\xi)(a_m(\xi))^{-1} + \int_a^b \gamma_x^{(m)}(x, \xi)\, g_i(x)\, dx,$$

und $\tilde{y}_i = K(\tilde{\tilde{y}}_i)$, so ist $\tilde{\tilde{y}}_i \in L^2(I)$ und $\tilde{y}_i \in M$. Für alle $f \in K(\mathscr{C})$ gilt nach $(*)$ $y_i(f) = (Lf, \tilde{\tilde{y}}_i)_H = (f, \tilde{y}_i)$, wobei $(\cdot, \cdot)$ das innere Produkt auf M bedeutet. Da $K(\mathscr{C})$ in M dicht ist, ist somit $y_i(f) = (f, \tilde{y}_i)$ für alle $f \in M$, d.h., $\tilde{y}_i$ ist der gesuchte Repräsentant von y_i in M. Die Funktion $\tilde{\tilde{y}}_i \in L^2(I)$ ist nichts anderes als der Repräsentant der Linearform $K'(y_{i|M}) \in L^2(I)'$ in $L^2(I)$.

Sei nun $g \in K^{2,m}(I)$. Dann ist $K(Lg)$ die M-Komponente von g. Die M-Komponente $p_M(s_g)$ jedes zu g gehörigen T-Spline-Elements erhält man als die Orthogonalprojektion von $K(Lg)$ auf den im Beweis von (2.3) angegebenen Teilraum von $\langle \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n \rangle$. Nun kann man in N ein Element h wählen —was eine reine Interpolationsaufgabe ist—, so daß $Th = T(g - p_M(s_g))$ gilt. Die Funktion $h + p_M(s_g)$ ist dann eine g interpolierende L-Spline-Funktion.

Splines im Sinne von Sard [26]

Im folgenden wollen wir im Rahmen unserer Überlegungen vom 1. Kapitel unter schwächeren Voraussetzungen einen anderen Zugang zu einigen Ergebnissen von Sard [26] angeben.

Es sei Y ein Prähilbertraum und $X, Z, Z^1, \ldots, Z^m$ jeweils ein Banachraum. Mit $\|\cdot\|$ bezeichnen wir die Norm in dem gerade betrachteten normierten Raum. Ferner sei $U \in \mathscr{L}(X, Y)$ und $F^i \in \mathscr{L}(X, Z^i)$ für $1 \leqslant i \leqslant m$. Der Banachraum X sei mit der von U induzierten, positiv semidefiniten Hermiteschen Form versehen. Entsprechend dem Prähilbertraum $\hat{E}$ vom 1. Kapitel verstehen wir unter $\hat{X}$ den Prähilbertraum $X/\mathrm{Kern}\ U\ (= X/N)$. Für jede Abbildung $S \in L(X, Z)$ mit $\mathrm{Kern}\ U \subseteq \mathrm{Kern}\ S$ bezeichne $\hat{S}$ diejenige lineare Abbildung von $\hat{X}$ nach Z, welche von S durch $\hat{S}(x + \mathrm{Kern}\ U) := Sx$ für alle $x \in X$ definiert wird.

Sei nun T diejenige lineare Abbildung von X in das topologische Produkt $\prod_{i=1}^m Z^i$, welche durch $Tx := (F^1x, \ldots, F^mx)$ für alle $x \in X$ definiert ist. Es ist $T \in \mathscr{L}(X, \prod_{i=1}^m Z^i)$.

Im folgenden sei stets diese Bedingung $(\mathscr{S})$ erfüllt:

$(\mathscr{S})$ *Es existiert eine Konstante $B < \infty$, so daß*

$$\| x \| \leqslant B \| U(x)\| \qquad \textit{für alle } x \in \mathrm{Kern}\ T \textit{ gilt.}$$

Die Bedingung $(\mathscr{S})$ ist schwächer als die 3. Hypothese von Sard [26].

SATZ 3.3. *Der Operator T ist ein Spline-Operator, und zu jedem $x \in X$ existiert genau ein T-Spline-Element.*

Beweis. Wir benutzen wieder die Bezeichnungen N und φ aus dem 1. Kapitel.

Es ist $N = \mathrm{Kern}\ U$. Aus der Bedingung $(\mathscr{S})$ ergibt sich sofort $N \cap \mathrm{Kern}\ T = \{0\}$. Nun ist $\mathrm{Kern}\ T$ ein abgeschlossener und somit ein vollständiger linearer Teilraum des Banachraumes X. Aus der Stetigkeit von U und der Bedingung $(\mathscr{S})$ folgt, daß der Teilraum $\varphi(\mathrm{Kern}\ T)$ von $\hat{X}$ topologisch isomorph zu $\mathrm{Kern}\ T$ ist, daß also $\varphi(\mathrm{Kern}\ T)$ ein vollständiger Teilraum des Prähilbertraums $\hat{X}$ ist. Da in Prähilberträumen jeder vollständige Teilraum ein orthogonales Komplement besitzt, ist nach (1.4.b) der Operator T ein Spline-Operator. Aus $\mathrm{Kern}\ T \cap N = \{0\}$ folgt, daß zu jedem $x \in X$ genau ein T-Spline-Element existiert. Q.E.D.

Es ist zu erwähnen, daß die Splines im Sinne von Sard [26] mit den T-Spline-Elementen übereinstimmen.

Da T ein Spline-Operator mit eindeutigen T-Spline-Elementen ist, besitzt nach (1.8.ii) in X der Teilraum $\mathrm{Kern}\ T$ ein orthogonales, algebraisches

Komplement M_1. Sei P die durch die Zerlegung $X = \text{Kern } T \oplus M_1$ definierte Projektion auf den Teilraum M_1. Aufgrund von (1.9) und (1.10) ist dann P die einzige zu T assoziierte Spline-Projektion. Die Abbildung $I - P$ ist eine Orthogonalprojektion in X mit $\text{Bild}(I - P) = \text{Kern } T$.

Es sei nun $G \in \mathscr{L}(X, Z)$, $A_0 := G \circ P$, $\mathscr{A}^* := \{A \in L(X, Z)\colon \text{Kern } T \subseteq \text{Kern } A$ und $\text{Kern } U \subseteq \text{Kern}(G - A)\}$ und $\mathscr{A}^{**} := \{A \in \mathscr{A}^*\colon \widehat{G - A} \in \mathscr{L}(\hat{X}, Z)\}$. Es ist klar, daß die in Sard [26] definierte Klasse $\mathscr{A}$ in $\mathscr{A}^*$ enthalten ist. Ist Z ein Hilbertraum, so läßt sich auf die gleiche Weise wie in [26] zeigen, daß für die Klasse $\mathscr{A}^*$ und den Operator A_0 die Ergebnisse von [26], Theorem 1, gelten, d.h., daß also der Operator A_0 im Sinne von Sard [26] die optimale Approximation zu G bezüglich der Klasse $\mathscr{A}^*$ ist.

Es sei der Raum $\mathscr{L}(\hat{X}, Z)$ mit der üblichen Norm versehen. Der folgende Satz entspricht dem ersten Teil von Sard [26], Theorem 2.

SATZ 3.4. *Es ist $A_0 \in \mathscr{A}^{**}$,*

$$\| \widehat{G - A_0} \| = \sup_{\substack{x \in \text{Kern } T \\ \| U(x) \| \leqslant 1}} \{\| Gx \|\}$$

und

$$\| \widehat{G - A_0} \| \leqslant \| \widehat{G - A} \|$$

für alle $A \in \mathscr{A}^{**}$, d.h., die Abbildung A_0 ist in diesem Sinne eine beste Approximation zu G bezüglich $\mathscr{A}^{**}$.

Beweis. Zunächst zeigen wir $A_0 \in \mathscr{A}^*$. Aus $\text{Kern } T = \text{Kern } P$ folgt $\text{Kern } T \subseteq \text{Kern } G \circ P$. Da für jedes $x \in X$ das Element Px das einzige T-Spline-Element ist, gilt $Px = x$ für alle $x \in \text{Kern } U$. Daraus folgt $\text{Kern } U \subseteq \text{Kern}(G - G \circ P)$. Es ist also $A_0 \in \mathscr{A}^*$.

Da $I - P$ eine Orthogonalprojektion ist, folgt für jedes $x \in X$ aus $\| U(x) \| \leqslant 1$ stets auch $\| U(x - Px) \| \leqslant 1$. Wir erhalten somit

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \| U(x) \| \leqslant 1}} \{\|(G - A_0)x\|\} = \sup_{\substack{x \in X \\ \| U(x) \| \leqslant 1}} \{\| G \circ (I - P)(x) \|\}$$

$$= \sup_{\substack{z \in \text{Kern } T \\ \| U(z) \| \leqslant 1}} \{\| Gz \|\} < \infty \qquad (\text{aufgrund von } (\mathscr{S})).$$

Es ist also $A_0 \in \mathscr{A}^{**}$, und $\| \widehat{G - A_0} \|$ besitzt den im Satz angegebenen Wert.

Sei nun $A \in \mathscr{A}^{**}$. Aus $\text{Kern } T \subseteq \text{Kern } A$ folgt $A = A \circ P$. Daraus ergibt sich $(G - A) \circ (I - P) = G - G \circ P = G \circ (I - P)$, dies bedeutet $(G - A)_{\text{Kern}\, T} = G_{\text{Kern}\, T}$. Es gilt daher

$$\| \widehat{G - A} \| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|U(x)\| \leqslant 1}} \{\|(G - A)x\|\} \geqslant \sup_{\substack{z \in \text{Kern}\, T \\ \|U(z)\| \leqslant 1}} \{\|(G - A)z\|\}$$

$$= \sup_{\substack{z \in \text{Kern}\, T \\ \|U(z)\| \leqslant 1}} \{\| Gz \|\} = \| \widehat{G - A_0} \|, \qquad \text{Q.E.D.}$$

Wir bemerken, daß es sich bei den Sätzen 2.7 und 3.4 im Grunde um Sätze des gleichen Typs handelt. Im Banachraum X ist der Teilraum $P(X)$ $(= M_1)$ abgeschlossen. Es ist daher X die topologische, direkte Summe der Teilräume $P(X)$ und Kern T. Die Frage, ob sich wie bei Sard [26] für jedes $G \in \mathscr{L}(X, Z)$ der entsprechende Operator A_0 in der Form $A_0 = \sum_{i=1}^{m} E^i \circ F^i$ mit $E^i \in \mathscr{L}(Z^i, Z)$ darstellen läßt, ist daher gleichbedeutend damit, ob für jedes $S \in \mathscr{L}(P(X), Z)$ eine solche Darstellung existiert.

References

1. N. I. Achieser, "Vorlesungen über Approximationstheorie," 2. verbesserte Auflage, Akademie–Verlag, Berlin, 1967.
2. J. H. Ahlberg and E. N. Nilson, The approximation of linear functionals, *SIAM J. Numer. Anal.* **3** (1966), 173–182.
3. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, and J. L. Walsh, Fundamental properties of generalized splines, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **52** (1964), 1412–1419.
4. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, and J. L. Walsh, "The Theory of Splines and Their Applications," Academic Press, New York and London, 1967.
5. P. M. Anselone and P. J. Laurent, A general method for the construction of interpolating or smoothing spline-functions, *Numer. Math.* **12** (1968), 66–82.
6. M. Atteia, Généralisation de la définition et des propriétés des "spline fonctions," *C. R. Acad. Sci. Paris* **260** (1965), 3550–3553
7 M. Atteia, "Splines fonctions" généralisées, *C. R. Acad. Sci. Paris* **261** (1965), 2149–2152.
8. M. Atteia, Fonctions "spline" définies sur un ensemble convexe, *Numer. Math.* **12** (1968), 192–210.
9. J. P. Aubin, Interpolation et approximation optimales et "spline functions," *J. Math. Anal. Appl.* **24** (1968), 1–24.
10. C. De Boor and R. E. Lynch, On splines and their minimum properties, *J. Math. Mech.* **15** (1966), 953–969.
11. F. J. Delvos and W. Schempp, On spline systems, *Monatsh. Math.* **74** (1970), 399–409.
12. F. J. Delvos and W. Schempp, L_m-splines, *Math. Z.* **126** (1972), 154–170.
13. M. Golomb and H. F. Weinberger, Optimal approximation and error bounds. In "On Numerical Approximation" (R. E. Langer, Ed.), pp. 117–190, University of Wisconsin Press, Madison, WI, 1959.

14. M. GOLOMB, "Splines, n-Widths and Optimal Approximations," Mathematics Research Center TSR No. 784, Madison, WI, 1967.
15. T. N. E. GREVILLE, Spline functions, interpolation, and numerical quadrature, *in* "Mathematical Methods for Digital Computers II," pp. 156–168 (A. Ralston and H. S. Wilf, Eds.), Wiley, New York, 1967.
16. W. HAUßMANN, Zur Theorie der Spline-Systeme, Habilitationsschrift, Bochum, 1970.
17. W. HAUßMANN, On multivariate spline systems, *J. Approximation Theory*, **11** (1974), 285–305.
18. J. W. JEROME AND L. L. SCHUMAKER, On Lg-splines, *J. Approximation Theory* **2** (1969), 29–49.
19. J. W. JEROME AND R. S. VARGA, Generalizations of spline functions and applications to nonlinear boundary value and eigenvalue problems, *in* "Theory and Applications of Spline Functions" (T. N. Greville, Ed.), pp. 103–155, Academic Press, New York–London, 1969.
20. E. KAMKE, Differentialgleichungen I, 4. Auflage. Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1962.
21. G. KIMELDORF AND G. WAHBA, Some results on Tchebycheffian spline functions, *J. Math. Anal. Appl.* **33** (1971), 82–95.
22. P. J. LAURENT, Construction of Spline Functions in a Convex Set, *in* "Approximations with Special Emphasis on Spline Functions," pp. 415–446 (I. J. Schoenberg, Ed.), Academic Press, New York–London, 1969.
23. T. R. LUCAS, A generalization of L-splines, *Numer. Math.* **15** (1970), 359–370.
24. T. R. LUCAS, M-Splines, *J. Approximation Theory* **5** (1972), 1–14.
25. K. RITTER, Generalized spline interpolation and nonlinear programming, *in* "Approximations with Special Emphasis on Spline Functions" (I. J. Schoenberg, Ed.), pp. 75–117, Academic Press, New York–London, 1969.
26. A. SARD, Optimal approximation, *J. Functional Analysis* **1** (1967), 222–244.
27. W. SCHEMPP, On spaces of distributions related to Schoenberg's approximation theorem, *Math. Z.* **114** (1970), 340–348.
28. I. J. SCHOENBERG, On best approximations of linear operators, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* **26** (1964), 155–163.
29. I. J. SCHOENBERG, On the Ahlberg–Nilson extension of spline interpolation: The g-splines and their optimal properties, *J. Math. Anal. Appl.* **21** (1968), 207–231.
30. M. H. SCHULTZ AND R. S. VARGA, L-splines, *Numer. Math.* **10** (1967), 345–369.